Лекція 8

1. **Закон розподілу ВВ задається інтегральною або диференціальною функціями розподілу.**

Інтегральна функція розподілу – F(x) : F(x)=P(X<x).

Її властивості:

0≤*F*(*x*)≤1;

*F*(*x*) – неспадна функція;  ймовірність того, що випадкова величина Х прийме значення з інтервалу (*а;b*), обчис­люється за формулою:

P(*a<x<b*)= *F*(*b*)–*F*(*a*) . **(2)**

Диференціальна функція розподілу або щільність розподілу НВВ

*f*(*x*)=*F′* (*x*) **(3)**

Її властивості: ****

*f*(*x*)≥ 0, оскільки є похідною від неспадної функції *F*(*x*);

, оскільки {-∞ < X < +∞} – вірогідна подія;

 ймовірність того, що НВВ прийме значення з інтервалу (а;b), обчислюється за формулою:



Графік диференціальної функції *f*(*x*)називають кривою розподілу.

**Приклад 1.** Задано функцію розподілу *F*(*x*) випадкової величини Х, що залежить від параметра *а*. Знайти значення параметра *а*; щільність роз­поділу *f*(*x*); ймовірність Р(–2<X<1), якщо



**Розв’язання.** За формулою (2) маємо *F*(0)–*F*(–4) = 1.

Скористаємось цією рівністю для знаходження значення параметра *а*:

*F*(0)=*а*(0+4)3/2 =*а*43/2= 8*а*; *F*(–4)=*а*(–4+4)3/2=*а*0=0;

*F*(0)–*F*(–4)=8*а*–0=8*а*=1, звідси *а*=1/8.

Диференціальна функція розподілу *f*(*x*)=*F′*(*x*).





Для обчислення Р(–2<X<1) використаємо формулу

*P*(*a<x<b*)= *F*(*b*)–*F*(*a*).

Тут *F*(–2<X<1)=*F*(1)–*F*(–2)=1–(–2+4)3/2=1–23/2 = 1–.

1. **Числові характеристики безперервних випадкових величин (НВВ)**

У випадку НВВ математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення мають той самий зміст і ті самі властивості, але вираховуються за іншими формулами. Якщо f(x) – щільність розподілу ймовірності Х, тоді М(Х) знаходять за формулою:

 (1)

Дисперсія, як і у випадку ДВВ, обчислюється за формулою:

D(X) = M((X - M(X))2),

що у випадку НВВ має вигляд:



Для розрахунку зручно використовувати формулу:

 (2)

Середнє квадратичне відхилення НВВ визначають таким чином:

**** (3)

Основними законами розподілу НВВ є рівномірний, показниковий, нормальний та розподіл Стьюдента.

Випадкова величина Х  **розподілена рівномірно у проміжку [*a;b*]**, якщо її щільність ймовірності має вигляд:

 (4)

Числові характеристики НВВ Х, що рівномірно розподілена:

;  (5)

Ймовірність того, що рівномірно розподілена ВВ Х потрапить в проміжок [*x*1;*x*2] за умови *a*≤x1<*x*2≤*b* вираховується за формулою:

 (6)

Випадкова величина Х розподілена за **показниковим законом з параметром λ,** якщо щільність її ймовірності має вигляд:

 (7)

Числові характеристики НВВ Х, що має показниковий розпо­діл, визначаються:

;  (8)

Інтегральна функція розподілу для ВВ Х, що має показниковий розподіл, задається формулою:

 (9)

Ймовірність того, що розподілена за показниковим законом BB Х потрапить в інтервал (a;b) за умови 0<a<b обчислюється за формулою:

Р(*a*<X<*b*)=F(*b*)–F(*a*) =λ*–aλ–*λ–*bλ* (10)

НВВ Х розподілена **за нормальним законом**, якщо щільність її ймовірності має вигляд:

, (11)

де *a* та σ – параметри розподілу.

**Приклад 2.** Знайти числові характеристики ВВ Х, що задана функцією розподілу:



**Розв’язання.** Знайдемо щільність ймовірності за формулою *f(x) = F(x):*



За формулою (1) знайдемо математичне сподівання:



Дисперсію знайдемо за формулою (2):



Середнє квадратичне відхилення знайдемо за формулою (3):

.

**Приклад 3.** Випадкова величина рівномірно розподілена на проміжку [3;18]. Знайти *М(Х), D(X), σ(X),* побудувати графіки функцій *f(x)* та *F(x)*, обчислити ймовірності подій Р(4<Х<10) та Р(Х<12).

**Розв’язання.** Згідно з формулами (4)-(6) і враховуючи, що

та *F(x)*=P(X<x), маємо :

 ; 

; ; 

; .

Графіки функцій *f(x)* та *F(x)* мають вигляд

**3. Емпірична функція розподілу**

Емпірична функція розподілу визначається як ,

де *nx* – число всіх варіант, менших х.

Емпірична функція *F(x)* є неспадаючою. Вона наближено зображує інтег­ральну функцію F(x)=P(X<x) генеральної сукупності.

**Приклад 4.** Для даного розподілу

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Xi | 2 | 5 | 7 |
| Ni | 4 | 16 | 20 |

Знайти емпіричну функцію і побудувати її графік.

**Розв’язання.** Об’єм вибірки є *n*=4+16+20=40. Найменша варіанта x1=2, тому *F(x)*=0 при *х*≤2. Значення *х*<5, тобто варіанта *x1*=2, спостерігалось 4 рази. Отже,

.

Для значення *х*<7 маємо дві варіанти *x1*=2, і *x2*=5, які спостерігались *n1+n2*=20 разів.

Тому .

Оскільки *x*=7 – найбільша варіанта, то *F(x)*=1 при *x*>7.

Емпірична функція *F(x)* приймає вигляд:



Її графік наведено на рисунку 1.

Рис. 1

1. Статистичні оцінки параметрів розподілу

Точковими оцінками є:

– вибіркова середня:

;

– вибіркова дисперсія:

.

**Зауваження.** Степеневою середньою вибірки називають:

;

– при α=1 одержимо вибіркову середню, а

– при α=2 – середньоквадратичну вибірки:

;

– при α=–1 одержимо середню гармонічну:

;

– при α=0 одержимо середню геометричну:

, де хі>0.

Для обчислення дисперсії ДВ частіше використовують формулу:

.

Вибірковим середньоквадратичним відхиленням називають:

.

Виправлена вибіркова дисперсія є:

2;

відповідно – виправлене середньоквадратичне відхилення вибірки.

**Приклад 5.** Вибіркова сукупність задана таблицею.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| хі | 5 | 8 | 10 | 11 | 14 |
| ni | 2 | 3 | 6 | 4 | 1 |

Знайти числові характеристики.

**Розв’язання.** Будуємо допоміжну таблицю.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| хі | ni | nixi | xi2 | nixi2 |
| 5 | 2 | 10 | 25 | 50 |
| 8 | 3 | 24 | 64 | 192 |
| 10 | 6 | 60 | 100 | 600 |
| 11 | 4 | 44 | 121 | 484 |
| 14 | 1 | 14 | 196 | 196 |
| n=16 | Σ16 | Σ152 |  | 1522 |







**Приклад 6.** Обчислити середнє квадратичне відхилення вибірки, заданої розподілом.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| хі | 0 | 2 | 5 |
| nі | 3 | 5 | 2 |



Запишемо розподіл х2.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| хі2 | 0 | 4 | 25 |
| ni | 3 | 5 | 2 |



.

1. **ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМИ  
   ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН**

***Початковим моментом порядку  системи***  називається величина . Якщо , маємо  при  дістаємо 

***Центральним моментом порядку***  називається величина . При значеннях    Якщо навпаки, , то   
 нарешті, при     — ***кореляційний момент*** (***коваріація***) випадкових величин  Його можна обчислити також за формулою:  Для незалежних випадкових величин кореляційний момент дорівнює нулю.

Кореляційний момент характеризує тісноту лінійної залежності між величинами. З цією самою метою застосовують ***коефіцієнт кореляції***  Якщо кореляційний момент (коефіцієнт кореляції) дорівнює нулю, то величини називаються ***некорельованими***. Із незалежності величин випливає їх некорельованість, але із некорельованості величин не випливає їх незалежність. Якщо величини пов’язані лінійною функціональною залежністю, то 

Для системи випадкових величин  числові характеристики задаються вектором математичних сподівань  і кореляційною матрицею:



Якщо елементи цієї матриці поділимо на добуток , дістанемо матрицю, складену з коефіцієнтів кореляції:



**Приклад 6**. Частка продукції заводу, що містить брак через дефект *А*, становить 3 %, а через дефект *В* — 4,5 %. Придатна продукція становить 95 %. Знайти коефіцієнти кореляції дефектів *А* і *В*.

***Розв’язання.*** Розглянемо систему дискретних випадкових величин  Вони дорівнюють відповідно 1, якщо продукція має дефект *А* або *В*, і нулю, якщо дефект відсутній. Можливі 4 комбінації значень змінних. Визначимо їхні ймовірності. За умовами придатна продукція становить 95 %, тому  Випадкова величина *Х* набуває значення 1 з імовірністю 0,03, тоді 

Отже, 

## Далі визначаємо такі ймовірності:

## Нарешті обчислюємо

Запишемо результати обчислень у таблицю:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| XY | 1 | 0 |  |
| 1 | 0,025 | 0,02 | 0,045 |
| 0 | 0,005 | 0,95 | 0,955 |
|  | 0,03 | 0,97 | 1 |

Для обчислення коефіцієнта кореляції  визначимо кореляційний момент:  Знайдемо значення величин, які входять до цієї формули:

 

Обчислимо дисперсії  і 

    

**Приклад 7**. Випадкові величини  мають відповідно математичні сподівання , дисперсії  і коефіцієнт кореляції Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини  де  — сталі.

***Розв’язання.*** Згідно з властивостями математичного сподівання маємо:



Величини  залежні. Виведемо формулу для визначення дисперсії 









1. Кореляція

Якщо лінії регресії У на Х і Х на У– прямі, то кореляцію називають лінійною.

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії У на Х:

;

Х на У - ,

де  – вибірковий коефіцієнт кореляції  .

**Зауваження.** Якщо дані спостережень задані кореляційною таблицею:

**Таблиця.1.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Yj/Xi | X1 | X2 | ••• | Xi | ••• | Xm | ni |
| Y1 | n11 | n12 | ••• | n1i | ••• | n1m |  |
| Y2 | n21 | n22 | ••• | n2i | ••• | n2m |  |
| ••• | ••• | ••• | ••• | ••• | ••• | ••• | ••• |
| Yj | nj1 | nj2 | ••• | nji | ••• | njm |  |
| ••• | ••• | ••• | ••• | ••• | ••• | ••• | ••• |
| Ym | nm1 | nm2 | ••• | nmi | ••• | nmm |  |
| nj |  |  | ••• |  | ••• |  |  |

то переходять до умовних варіант , ,

де C1 – для варіант х новий початок відліку;

в якості C2 зручно приймати варіанту, яка розміщена приблизно в середині варіаційного ряду;

h1– крок, тобто різниця між двома сусідніми варіантами Х;

C2 – для варіант У новий початок відліку;

h2 – крок варіант У.

**Приклад 7.** За заданою кореляційною таблицею результатів вибірки, ознаки Х,У якої мають нормальний закон розподілу, потрібно записати рівняння прямих регресій

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Yj | Xi | | | | | ni |
| 5 | 1 | 2 | 2 | 5 | – | 10 |
| 10 | 1 | 1 | 3 | 5 | – | 10 |
| 15 | 2 | 2 | 1 | 25 | 5 | 35 |
| 20 | 1 | 1 | 4 | – | 14 | 20 |
| 25 | – | 4 | 15 | – | 6 | 25 |
| nj | 5 | 10 | 25 | 35 | 25 | 100 |

**Розв’язок.**

;



;

;

;

;



; ;

; ;

; .